

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد		
	نمره		

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۴ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.	۱/۷۵
۲	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $3a + 2$ بر ۸ را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $9k + 7$ و $7k + 6$ بر n بخش پذیرند، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.	۱
۴	باقی مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱/۵
۵	معادله هم نهشتی $x \equiv 2 \pmod{5}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۱/۲۵
۶	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) مجموع درجه های رأس های هر گراف تعداد یال ها است. ب) در یک گراف k - منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است. پ) در بین تمام مجموعه های احاطه گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه گر گراف G می نامیم. ت) یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش، دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می نامیم.	۱
۷	گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید. الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید. ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید. پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.	۱/۲۵
۸	در گراف G ، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف \overline{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.	۰/۷۵
۹	گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.	۱
۱۰	عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.	۱/۲۵
۱۱	با ارقام عدد ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت.	۰/۷۵
۱۲	به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.	۱/۲۵

« بقیه سوالات در صفحه دوم »

سؤالات امتحان نهایی درس : ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی :	ساعت شروع : ۸ صبح	رشته : ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان : ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

۱۳	مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱،۲،۳،۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.	۱	<table><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr></table>	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴																				
۲	۱	۴	۳																																				
۴	۳	۲	۱																																				
۳	۴	۱	۲																																				
۱	۲	۳	۴																																				
۱۴	در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.	۱	<table><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr></table> <table><tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr></table> (ب) <table><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr></table> <table><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr><tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr><tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table> (الف)	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۱	۳	۲	۳	۲	۱
۱	۲	۳																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۳	۱	۲																																					
۲	۳	۱																																					
۱	۲	۳																																					
۳	۲	۱																																					
۱	۳	۲																																					
۲	۱	۳																																					
۲	۱	۳																																					
۱	۳	۲																																					
۳	۲	۱																																					
(ب) بخش انتخابی دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۵ تا ۲۲ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.																																							
۱۵	اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.	۱																																					
۱۶	گراف G ، ۶ رأسی ۳-منتظم است. (الف) اندازه گراف G را بیابید. (ب) نمودار گراف G را رسم کنید.	۱																																					
۱۷	ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱																																					
۱۸	۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: (الف) هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند. (ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند.	۱																																					
۱۹	به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).	۱																																					
۲۰	در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟	۱																																					
۲۱	در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟	۱																																					
۲۲	قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.	۱																																					
۲۴	جمع نمره	"موفق باشید"																																					

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک		ساعت شروع: ۸ صبح		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه				تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸			
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹				مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir			
ردیف		راهنمای تصحیح					
پاسخ سوالات الزامی							
۱	الف) نادرست (0/25) ب) درست (0/25)	$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^C$ (0/25), $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^C$ (0/25) (مشابه قسمت ت کار در کلاس صفحه 3) $(2k+1)^2 - 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(0/25)} - 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{(0/25)} = \underbrace{4 \times 2q}_{(0/25)} = 8q$ (مسأله 3 صفحه 15)					
۲		$a = 4q + 3$ (0/25) $\Rightarrow 2a + 3 = \underbrace{8q + 9}_{(0/25)} = \underbrace{8(q+1) + 1}_{(0/25)} = 8q' + 1$ (0/25) $\Rightarrow r = 1$ (0/25) (مشابه مثال صفحه 14)					
۳		$n 9k + 7 \times (-7)$ (0/25) $\Rightarrow n -63k - 49 + 63k + 54$ (0/25) $\Rightarrow n 5$ (0/25) $\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1$ یا 5 (0/25) $n 7k + 6 \times 9$ (0/25) (مثال صفحه 12)					
۴		$7^2 = 49 \equiv 4$ (0/25) $\Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1$ (0/5) $\Rightarrow 7^{28} \equiv 1$ (0/25) $\xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4 (0/25)} 7^{30} \equiv 4$ (0/25) (مشابه سوال 8 و 9 صفحه 29)					
۵		$2 \equiv 35$ (0/25) $\Rightarrow 5x \equiv 35$ (0/25) $\xrightarrow{(5,11)=1 (0/25)} x \equiv 7$ (0/25) $\Rightarrow x = 11k + 7$ (0/25) (مشابه سوال 14 صفحه 30)					
۶	الف) دو برابر (0/25) (نتیجه ابتدای صفحه 40) پ) مینیمم (0/25) (تعریف صفحه 44) ت) مینیمال (0/25) (تعریف صفحه 46)	ب) k (0/25) (تعریف گراف منظم صفحه 35)					
۷	الف) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$ (0/5) (مشابه مثال صفحه 36) ب) دور به طول 4 a, b, e, d, a (0/25) (تعریف دور صفحه 38) (در قسمت ب اگر دور را به صورت a, d, e, b, a نوشت، نمره داده شود). پ) مسیر به طول 3. a, e, b, c (0/25) و مسیر به طول 4. a, d, e, b, c (0/25) (مشابه مثال صفحه 38)						
۸		$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow 9 + 12 = p - 1$ (0/25) $\Rightarrow p = 22$ (0/25) (مسأله 1 صفحه 38)					
۹	الف) گراف روبه‌رو از مرتبه 6 و دارای تنها یک مجموعه احاطه‌گریکتا $\{a, b\}$ است. (0/25) رسم گراف (0/25) (تمرین 9 صفحه 53) ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه‌گری به اندازه 2 است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$. (0/25) (ذکر یک مجموعه کافی است.) رسم گراف (0/25)						
۱۰	برای گراف مورد سوال داریم $\left\lceil \frac{10}{3+1} \right\rceil = 3 \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ (0/5). از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است (0/25). لذا $\gamma(G) \leq 3$ (0/25). بنابراین $\gamma(G) = 3$ (0/25). (قسمت دوم کار در کلاس صفحه 50)						
۱۱		$\frac{7!}{2! \times 3!}$ (0/5) = 42 (0/25) (مشابه مثال پایین صفحه 58)					
۱۲	(قسمت پ تمرین 8 صفحه 71)	$x_1 + \dots + x_5 = 11$, $x_2 \geq 2$, $x_5 \geq 4$ (0/25) $x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11$ (0/25) $\Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$ (0/25) \Rightarrow جواب $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$ (0/5)					
ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم							

ادامه پاسخ‌ها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۳	با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ (۵/۰) مربع لاتین به صورت مقابل داریم. (مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۷۲) (۵/۰) (برای جایگشت‌های دیگر نیز بارم مناسب در نظر بگیرید.)	۱
۱۴	متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد. (۵/۰) متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (۵/۰) (مثال صفحه ۶۵)	۱

پاسخ سوالات اختیاری

۱۵	چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است. (۵/۰) (قسمت الف تمرین ۱ صفحه ۸)	۱
۱۶	الف) $3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$ (۵/۰) ب) رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است. (۵/۰)	۱
۱۷	فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ (۵/۰) از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2k$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2q$ زوج اند. (۵/۰) لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. (۵/۰) می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (۵/۰) (صفحه ۴۰)	۱
۱۸	الف) $4! \times 3!$ (۵/۰) ب) $4! \times 4!$ (۵/۰) (مشابه مثال صفحه ۵۷)	۱
۱۹	تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی (۵/۰)، یعنی: $(8)_4 = \frac{8!}{4!} = 1680$ (۵/۰) (مثال پایین صفحه ۷۸)	۱
۲۰	(مشابه کار در کلاس صفحه ۷۶) $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow A = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ (۵/۰) $B = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow B = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$ (۵/۰) $A \cap B = \{n \mid 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$ (۵/۰) $\Rightarrow A \cup B = 16 + 10 - 3 = 23$ (۵/۰)	۱

ادامه پاسخ‌ها در صفحه سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه																																																															
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۴/۰۸																																																																	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور خرداد ماه سال ۱۳۹۹		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir																																																																	
ردیف	راهنمای تصحیح																																																																		
۲۱	در این مسأله $k+1=7 \Rightarrow k=6$ و تعداد لانه ها ۱۲ است (۰/۲۵). پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش آموزان حداقل می‌بایست $k n + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (۰/۵)																																																																		
۲۲	<p>برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص کننده الیاف است. (سوال ۱۴ صفحه ۷۲)</p> <table><tr><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td><td></td><td>W_1</td><td>W_2</td><td>W_3</td></tr><tr><td>روز اول</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td rowspan="3">$= A$</td><td>روز اول</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td rowspan="3">$= B \Rightarrow$</td><td>روز اول</td><td>12</td><td>31</td><td>23</td></tr><tr><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>روز دوم</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>روز دوم</td><td>33</td><td>22</td><td>11</td></tr><tr><td>روز سوم</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>روز سوم</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>روز سوم</td><td>21</td><td>13</td><td>32</td></tr><tr><td></td><td colspan="3">(۰/۲۵)</td><td></td><td>(۰/۵)</td><td colspan="3">(۰/۲۵)</td><td></td><td colspan="3"></td></tr></table> <p>عدد سمت چپ هر درآیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.</p>					W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3	روز اول	1	3	2	$= A$	روز اول	2	1	3	$= B \Rightarrow$	روز اول	12	31	23	روز دوم	3	2	1	روز دوم	3	2	1	روز دوم	33	22	11	روز سوم	2	1	3	روز سوم	1	3	2	روز سوم	21	13	32		(۰/۲۵)				(۰/۵)	(۰/۲۵)						
	W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3		W_1	W_2	W_3																																																								
روز اول	1	3	2	$= A$	روز اول	2	1	3	$= B \Rightarrow$	روز اول	12	31	23																																																						
روز دوم	3	2	1		روز دوم	3	2	1		روز دوم	33	22	11																																																						
روز سوم	2	1	3		روز سوم	1	3	2		روز سوم	21	13	32																																																						
	(۰/۲۵)				(۰/۵)	(۰/۲۵)																																																													
۲۰	جمع نمره																																																																		

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»